

Свойства течений вязкой несжимаемой жидкости описываются при помощи решений системы уравнений Навье-Стокса

$$U_t + UU_x + VU_y + WU_z - \mu(U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}) + P_x = 0,$$

$$V_t + UV_x + VV_y + WV_z - \mu(V_{xx} + V_{yy} + U_{zz}) + P_y = 0,$$

$$W_t + UW_x + VW_y + WW_z - \mu(W_{xx} + W_{yy} + W_{zz}) + P_z = 0, \quad U_x + V_y + W_z = 0,$$

где $U = U(x, y, z, t)$, $V = V(x, y, z, t)$, $W = W(x, y, z, t)$, функции скорости течения, $P = P(x, y, z, t)$ -давление и μ -коэффициент вязкости жидкости. Построение точных решений данной системы четырех нелинейных уравнений в ч.пр. представляет важную нерешенную проблему.

В данной работе предлагается использовать геометрический подход к ее решению, основанный на следующем утверждении:

14-мерное Риманово пространство с локальными координатами $x, y, z, t, \eta, \rho, m, u, v, w, p, \xi, \chi, n$, оснащенное метрикой вида

$$ds^2 = -(uU + vV + wW)dt^2 + \\ + Ad\eta^2 + Bd\rho^2 + Cdm^2 + 2dxdu + 2dydv + 2dzdw + 2d\eta d\xi + 2\rho d\chi + dmdn,$$

где

$$A = (-UW + \mu U_x)w + (-UV + \mu U_y)v + (-U^2 - P + \mu U_x)u - Up,$$

$$B = (\mu V_z - VW)w + (-V^2 - P + \mu V_y)v + (-UV + \mu V_x)u - Vp,$$

$$C = (\mu W_z - (W^2 - P))w + (\mu W_y - VW)v + (-UW + \mu W_x)u - Wp.$$

имеет четыре отличных от нуля компонент тензора Риччи R_{ij} , которые обращаются в нуль на решения системы уравнений Навье-Стокса, записанных в форме законов сохранения

$$R_{44} = 0, \quad R_{55} = 0, \quad R_{66} = 0, \quad R_{77} = 0.$$

Именно с этой точки зрения она представляет интерес для данной системы. При этом, следует учитывать то обстоятельство, что указанные условия на тензор кривизны Риччи метрики должны рассматриваться с учетом соотношений вида $P_{xy} - P_{yx} = 0$, $P_{xz} - P_{zx} = 0$, $P_{yz} - P_{zy} = 0$, или им эквивалентным

$$U_y = - \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} H(v, t) \right) \frac{\partial}{\partial y} \Phi(\vec{v}, t) + \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x \partial z} H(\vec{v}, t) \right) \Phi(\vec{v}, t) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Phi(\vec{v}, t)}{- \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} H(\vec{v}, t) \right) \Phi(\vec{v}, t) + \frac{\partial}{\partial x} \Phi(\vec{v}, t)},$$

$$U_z = - \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} H(\vec{v}, t) \right) \frac{\partial}{\partial z} \Phi(\vec{v}, t) + \Phi(\vec{v}, t) \frac{\partial^3}{\partial z \partial x \partial z} H(\vec{v}, t) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \Phi(\vec{v}, t)}{- \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} H(\vec{v}, t) \right) \Phi(\vec{v}, t) + \frac{\partial}{\partial x} \Phi(\vec{v}, t)},$$

Введенная метрика принадлежит к классу пространств Римановых расширений пространств аффинной связности, ее скалярные инварианты, построенные из компонент тензора кривизны Римана равны нулю, и соответствующее ей 14-мерное пространство является частично-проективным пространством Кагана, в котором шесть уравнений геодезических линий имеют вид

$$\ddot{\eta} = 0, \quad \ddot{\rho} = 0, \quad \ddot{m} = 0, \quad \ddot{\xi} = 0, \quad \ddot{\chi} = 0, \quad \ddot{n} = 0,$$

а остальные восемь уравнений для координат x, y, z, t, u, v, w, p образуют двойственную систему уравнений.

При построении решений уравнений Навье-Стокса (как гладких, так и сингулярных) используются уравнения Киллинга

$$K_{i,j} + K_{j,i} - 2\Gamma_{ij}^k K_k = 0, \text{ or } K^k g_{ij,k} + g_{ik} K^k_{,j} + g_{jk} K^k_{,i} = 0,$$

и производные Ли соответствующих векторных полей u^k ,

$$u^i_{j,k} + u^n \Gamma_{jk,n}^i + u^n_{,j} \Gamma_{nk}^i + u^n_{,k} \Gamma_{jn}^i - u^n_{,n} \Gamma_{jk}^i = 0,$$

где Γ_{jk}^i - коэффициенты связности метрики $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$.

Приведем в качестве примера использования ненулевых инвариантов Е. Картана построение трехмерного аналога классического двумерного вихря Тейлора-Грина

$$U = \cos(x) \sin(y) e^{-2\mu t}, \quad V = -\sin(x) \cos(y) e^{-2\mu t}, \\ W = 0, \quad P = -1/4 (\cos(2x) + \cos(2y)) e^{-4\mu t}.$$

Инвариант Е.Картана метрики с вектором с зависящими от координат (x, y, z, t) компонентами вида $A^k = [a, b, c, e, 0, 0, 0, f, l, m, n, 0, 0, 0]$, построенный с помощью ее тензора кривизны Римана R^i_{jkl} имеет вид

$$T = VW_y + UW_x + (V_y)^2 + UV_y + U_y V_x + (U_x)^2.$$

Решение уравнений Навье-Стокса с учетом наличия инварианта T , приводит к построению новых примеров трехмерных течений типа вихря Тейлора-Грина.

Работа выполнена при финансовой поддержке НАИР (Республика Молдова) (грант по.2170086.31SD).

Литература

1. Gussens M., Миттельбах Ф., Самарин А. *Путеводитель по пакету $\text{\LaTeX}$ и его расширению $\text{\LaTeX}2\epsilon$* . – М.: Мир, 1999. – 606 с.
2. Dryuma V. S. *On spaces related to the Navier-Stokes equations*// Buletinul Academiei de Stiinte a Republicii Moldova., Matematica, 2010. V. 3(64). P. 107–110.
3. Dryuma V. S. *The Ricci-flat spaces related to the Navier-Stokes equations*// Buletinul Academiei de Stiinte a Republicii Moldova., Matematica, 2012. V. 2(69). P. 99–102.

GEOMETRIC APPROACH TO THE STUDY OF THE NAVIER-STOKES SYSTEM OF EQUATIONS

V.S. Dryuma

This article is devoted to the study of the property flows of incompressible viscous fluids. The 14D-space endowed with a Ricci-flat metric on the solutions of the Navier-Stokes system is considered. A new type of corresponding divergence-free vector fields are discussed. With the help of E. Cartan's invariants of the metric a three-dimensional generalization of the Taylor-Green vortex is constructed.

Keywords: metric of Riemann, Killing vector, Navier-Stokes equations.